Η Δομή Μονοειδούς στην Τυπική Μουσική

Μαριάνθη Μποζαπαλίδου
Ξιφιλινών 6, 55131 Θεσσαλονίκη
email: bozapalidou@gmail.com

Περίληψη

Στο άρθρο αυτό εισάγουμε βασικές έννοιες της μουσικής με τρόπο αξιωματικό. Γενικά με τον όρο τυπικό σύστημα (formal system) εννοούμε ένα σύνολο εφοδιασμένο με πράξεις που πληρούν ορισμένες σχέσεις. Ένα τέτοιο σύστημα X που πληρεί πρόσθετες συνθήκες (σ), ουσιαστικά δομεί το σύνολο πηλίκο $X/(\sigma)$ στο ελάχιστο τυπικό σύστημα που ικανοποιεί την (σ). Εδώ έχουμε να κάνουμε με το τυπικό σύστημα M_{MUS} των μουσικών λέξεων, δηλαδή των λέξεων του αλφάβητου

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (\{c(k), c(k)\sharp, \ldots, a(k), a(k)\sharp, b(k)\}) \cup \{\sharp, \flat\}$$

που δεν ξεκινούν από αλλοίωση, εφοδιασμένο με την πράξη της παράθεσης που το δομεί σε μονοειδές.

Η διατονική ισοδυναμία $\sim_D$ που παράγεται από τις σχέσεις

$$\sharp\flat = \varepsilon = \flat\sharp, \;\; c(k)\sharp\sharp = d(k), \ldots, a(k)\sharp\sharp = b(k), \;\; b(k)\sharp = c(k+1), \;\; k \in \mathbb{Z}$$

είναι συμβατή με την παράθεση και το μονοειδές πηλίκο $M_D = M_{MUS}/\sim_D$ φέρει όλη την πληροφορία όσον αφορά την διατονικότητα (διατονικό μονοειδές). Απαλείφοντας τους δείκτες της οκτάβας κατασκευάζουμε με ανάλογο τρόπο το μονοειδές M_d και αποδεικνύουμε τον ισομορφισμό $M_d \xrightarrow{\sim} M_D/\sim_B$ όπου $\sim_B$ είναι η ισοδυναμία που προκύπτει από τον μορφισμό *Babbitt*. Ο προηγούμενος ισομορφισμός εκφράζει ότι η διατονικότητα στον mod12 μουσικό κόσμο προκύπτει από την διατονικότητα στον διακριτό πραγματικό μουσικό κόσμο μέσω της ισοδυναμίας *Babbitt*.

1 Εισαγωγή

Η Τυπική Μουσική χρησιμοποιεί την γλώσσα των μαθηματικών για την περιγραφή, κατανόηση και ερμηνεία μουσικών φαινομένων. Μοντέρνες μαθηματικές δομές χρησιμοποιούνται για την ανάλυση μουσικών δομών και για την διατύπωση νέων μουσικών θεωριών που επεκτείνουν τα όρια της μουσικής διαδικασίας, Bozapalidou [5, 6, 7].

Η Τυπική Μουσική συνδέεται στενά με την Μαθηματική Γλωσσολογία, όπου οι βασικές έννοιες είναι το αλφάβητο, οι λέξεις και οι γλώσσες. Ένα *αλφάβητο* δεν είναι παρά ένα οποιοδήποτε πεπερασμένο ή άπειρο σύνολο τα στοιχεία του οποίου ονομάζονται *γράμματα* του αλφάβητου. Μία *λέξη* από ένα αλφάβητο X είναι μια πεπερασμένη ακολουθία από γράμματα του X

$$x_1 x_2 \cdots x_k, \quad \text{όπου} \quad x_1, x_2, \ldots, x_k \in X.$$

Με X^* συμβολίζουμε το σύνολο όλων των λέξεων από το X συμπεριλαμβανομένης και της κενής λέξης ε. Η *παράθεση* των λέξεων $u = x_1 x_2 \cdots x_k$ και $v = y_1 y_2 \cdots y_\ell$ είναι η λέξη που προκύπτει αν γράψουμε την v δεξιά της u

$$uv = x_1 x_2 \cdots x_k y_1 y_2 \cdots y_\ell.$$

Η αλγεβρική δομή που δεσπόζει στην Μαθηματική Μουσική είναι εκείνη του μονοειδούς. *Μονοειδές* είναι ένα σύνολο M εφοδιασμένο με μία προσεταιριστική πράξη

$$(m_1, m_2) \mapsto m_1 \oplus m_2$$

που δέχεται ένα ουδέτερο στοιχείο e, δηλ. ισχύουν

$$m_1 \oplus (m_2 \oplus m_3) = (m_1 \oplus m_2) \oplus m_3, \quad \text{για όλα τα} \quad m_1, m_2, m_3 \in X$$

και

$$m \oplus e = e \oplus m, \quad \text{για όλα τα} \quad m \in M.$$

Το τυπικό παράδειγμα μονοειδούς είναι το X^* με πράξη την παράθεση και ουδέτερο στοιχείο την κενή λέξη.

2 Το Μονοειδές των Μουσικών Λέξεων

Στη χωροταξία των πλήκτρων του πιάνου, ξεκινώντας από το μεσαίο c έχουμε την ακόλουθη διάταξη των δώδεκα φθόγγων

$$c, c\sharp, d, d\sharp, e, f, f\sharp, g, g\sharp, a, a\sharp, b \tag{οκτ}$$

Δεξιά της (οκτ) είναι τοποθετημένα αντίγραφα αυτής που το καθένα είναι κατά δώδεκα ημιτόνια υψηλότερα από το προηγούμενό του.

Όμοια, αριστερά της (οκτ) υπάρχουν τοποθετημένα αντίγραφά της που το καθένα είναι κατά δώδεκα ημιτόνια χαμηλότερα από το επόμενό του.

Για να περιγράψουμε σχηματικά την διάταξη αυτή χρησιμοποιούμε τον κατακόρυφο *άξονα των φθόγγων*

$$
\begin{array}{c}
\vdots \\
b(k) \\
\vdots \\
c(k)\sharp \\
c(k) \\
\vdots \\
b(0) \\
\vdots \\
c(0)\sharp \\
c(0) \\
\vdots \\
b(-k) \\
\vdots \\
c(-k)\sharp \\
c(-k) \\
\vdots
\end{array}
\qquad k = 1, 2, \ldots \tag{$\varphi\theta$}
$$

Σχήμα 1. Ο άξονας των φθόγγων

Θεωρούμε το αλφάβητο

$$X_{NOTE} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{c(k), c(k)\sharp, \ldots, b(k)\} \cup \{\sharp, \flat\}$$

όπου $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ είναι το σύνολο το ακέραιων αριθμών. Κάθε λέξη από το X^*_{NOTE} γράφεται κατά μοναδικό τρόπο με την μορφή

$$s = w_0 x_1(k_1) w_1 x_2(k_2) w_2 \cdots x_p(k_p) w_p$$

όπου

$$w_0, w_1, w_2, \ldots, w_p \in \{\sharp, \flat\}^* \;\; \text{και} \;\; x_1(k_1), x_2(k_2), \ldots, x_p(k_p) \in X_{NOTE}.$$

Για παράδειγμα

$$s_1 = \sharp\flat b(2) c(o) \sharp d(-3) \sharp\flat f(0), \;\; s_2 = f(-1) \sharp g(1), \;\; \text{κλπ.}$$

Επειδή μία λέξη που αρχίζει από αλλοιώσεις δεν έχει μουσικό νόημα, στο εξής θα θεωρούμε μόνο λέξεις της μορφής,

$$s = x_1(k_1) w_1 \cdots x_p(k_p) w_p,$$

$$x_1(k_1), \ldots, x_p(k_p) \in X_{NOTE}, \;\; w_1, \ldots, w_p \in \{\sharp, \flat\}^*$$

τις οποίες ονομάζουμε *μουσικές λέξεις*.

Καθώς η παράθεση δύο οποιονδήποτε μουσικών λέξεων $x_1(k_1)w_1 \cdots\ x_p(k_p)w_p$ και $y_1(\lambda_1)u_1 \cdots y_q(\lambda_q)u_q$ είναι πάλι μουσική λέξη

$$x_1(k_1)w_1 \cdots x_p(k_p)w_p y_1(\lambda_1)u_1 \cdots y_q(\lambda_q)u_q,$$

το σύνολο των μουσικών λέξεων μαζί με την κενή λέξη ε αποτελεί ένα μονοειδές που το συμβολίζουμε M_{MUS} και το ονομάζουμε *Μουσικό Μονοειδές*.

3 Το Διατονικό Μονοειδές

Στη παράγραφο αυτή μας χρειάζεται η έννοια της ισοδυναμίας που είναι ταυτόσημη με την έννοια του διαμελισμού ενός συνόλου.

Μια *ισοδυναμία* σε ένα σύνολο X είναι μια σχέση μεταξύ των στοιχείων του X

$$x \sim y \quad (x, y \in X)$$

που έχει τις ακόλουθες ιδιότητες
i) $x \sim x$ για όλα τα στοιχεία $x \in X$
ii) αν $x \sim y$, τότε και $y \sim x$
iii) αν $x \sim y$ και $y \sim z$, τότε και $x \sim z$.
Το σύνολο

$$[x] = \{y / z \sim x\}$$

ονομάζεται *κλάση ισοδυναμίας* του $x \in X$. Λόγω των ιδιοτήτων i)-iii) οι κλάσεις ισοδυναμίας διαμελίζουν το σύνολο X. Το σύνολο $X/\sim$ που έχει ως στοιχεία του τις κλασεις ισδυναμίας ονομάζεται *σύνολο πηλίκο* του X δια της $\sim$. Αν τώρα το X έχει μια πρόσθετη δομή, π.χ. είναι μονοειδές και η ισοδυναμία $\sim$ είναι συμβατή με την πράξη του μονοειδούς, δηλαδή $x_1 \sim y_1$ και $x_2 \sim y_2$ συνεπάγονται $x_1 \oplus x_2 \sim y_1 \oplus y_2$, τότε το πηλίκο $X/\sim$ δομείται επίσης σε μονοειδές με πράξη $[x] \oplus [y] = [x \oplus y]$. Το μονοειδές αυτό ονομάζεται *μονοειδές πηλίκο*. Είμαστε τώρα έτοιμοι να εισάγουμε το διατονικό μονοειδές.

Λέμε ότι οι μουσικές λέξεις $s, t \in M_{MUS}$ είναι *διατονικά ισοδύναμες* $s \backsim_D t$, αν η μία προκύπτει από την άλλη εφαρμόζοντας μία ή περισσότερες φορές τις ακόλουθες θεμελιώδεις ισότητες:

$$\sharp\flat = \varepsilon, \quad \flat\sharp = \varepsilon$$

$$\Sigma_0 = \begin{cases} c(k)\sharp\sharp = d(k) \\ \qquad d(k)\sharp\sharp = e(k) \\ \qquad\qquad e(k)\sharp = f(k) \\ \qquad\qquad\qquad f(k)\sharp\sharp = g(k) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad g(k)\sharp\sharp = a(k) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a(k)\sharp\sharp = b(k) \\ b(k)\sharp = c(k+1) \end{cases}$$

όπου $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Διαπιστώνουμε ότι οι μουσικές λέξεις

$$c(0)\sharp\sharp\flat\sharp d(-3) f(1)\sharp\flat\flat, \quad d(0) d(-3) f(1)\flat$$

είναι διατονικά ισοδύναμες, αφού

$$c(0)\sharp\sharp = d(0), \ \ \flat\sharp = \varepsilon \ \text{ και } \ \sharp\flat = \varepsilon.$$

Πρόταση 1. *Ισχύουν τα ακόλουθα*

1. *Για κάθε μουσική λέξη s έχουμε $s \sim_D s$ (ανακλαστική ιδιότητα).*
2. *Αν $s \sim_D s'$ τότε και $s' \sim_D s$ (συμμετρική ιδιότητα).*
3. *Αν $s \sim_D s'$ και $s' \sim_D s''$, τότε $s \sim_D s''$ (μεταβατική ιδιότητα).*
4. *Αν $s_1 \sim_D t_1$ και $s_2 \sim_D t_2$, τότε $s_1 s_2 \sim_D t_1 t_2$.*
5. *Αν $s \sim_D t$ και $w \in \{\sharp, \flat\}^*$, τότε $sw \sim_D tw$.*

Προκύπτει λοιπόν ότι η $\sim_D$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο M_{MUS} συμβατή με την πράξη της παράθεσης και άρα το πηλίκο $M_{MUS}/\sim_D$ είναι μονοειδές που το ονομάζουμε *διατονικό μονοειδές* και το συμβολίζουμε M_D, δηλαδή

$$M_D = M_{MUS}/\sim_D .$$

Τα στοιχεία του M_D είναι οι κλάσεις της ισοδυναμίας $\sim_D$ που τις ονομάζουμε *διατονικές κλάσεις*.

Η διατονική κλάση της μουσικής λέξης s συμβολίζεται $[s]_D$ και είναι

$$[s]_D = \{t/t \in M_{MUS}, \ \ t \sim_D s\}$$

για παράδειγμα η διατονική κλάση της $s = f(1)b(-1)$ είναι

$$[s]_D = \{f(1)wb(-1)w'/w, w' \in L(\sharp, \flat)\}$$

όπου η γλώσσα $L(\sharp, \flat) \subseteq \{\sharp, \flat\}^*$ αποτελείται από όλες τις λέξεις w στις οποίες εμφανίζονται τόσες διέσεις όσες και υφέσεις. Η $L(\sharp, \flat)$ είναι η γνωστή γλώσσα *Dyck* με δύο γράμματα, Berstel [3].

Ο πολλαπλασιασμός στο μονοειδές M_D ορίζεται από την σχέση

$$[s]_D \cdot [s']_D = [ss']_D$$

δηλαδή για να βρούμε το γινόμενο των κλάσεων $[s]_D$ και $[s']_D$ δεν έχουμε παρά να παραθέσουμε τις μουσικές λέξεις s και s' και στη συνέχεια να θεωρήσουμε τη διατονική κλάση της ss'. Π.χ. έχουμε

$$[c(0)\flat a(0)\sharp]_D \cdot [f(0)g(1)\sharp]_D = [c(0)\flat a(0)\sharp f(0)g(1)\sharp]_D.$$

Πρόταση 2. *Ισχύουν*

$$\Sigma_1 = \left\{ \begin{array}{lllllll} b(k)\flat\flat \sim_D a(k) & & & & & & \\ & a(k)\flat\flat \sim_D g(k) & & & & & \\ & & g(k)\flat\flat \sim_D f(k) & & & & \\ & & & f(k)\flat \sim_D e(k) & & & \\ & & & & e(k)\flat\flat \sim_D d(k) & & \\ & & & & & d(k)\flat\flat \sim_D c(k) & \\ c(k)\flat \sim_D b(k-1) & & & & & & \end{array} \right.$$

για όλα τα $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Προοφ. Από την $b(k-1)\sharp \sim_D c(k)$ παίρνουμε $b(k-1)\sharp\flat \sim_D c(k)\flat$, από όπου $b(k-1) \sim_D c(k)\flat$ και η πρώτη των σχέσεων αποκαταστάθηκε.

Όμοια, από την σχέση $a(k)\sharp\sharp \sim_D b(k)$ παίρνουμε $a(k)\sharp\sharp\flat\flat \sim_D b(k)\flat\flat$ από όπου $a(k) \sim_D b(k)\flat\flat$. Με όμοιο τρόπο αποκαθίστανται και οι υπόλοιπες σχέσεις. $\square$

Πρόταση 3. *Ισχύουν*

$$\Sigma_2 = \begin{cases} c(k)\sharp \sim_D d(k)\flat \\ \quad d(k)\sharp \sim_D e(k)\flat \\ \quad\quad f(k)\sharp \sim_D g(k)\flat \\ \quad\quad\quad g(k)\sharp \sim_D a(k)\flat \\ \quad\quad\quad\quad a(k)\sharp \sim_D b(k)\flat \end{cases}$$

για όλα τα $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Προοφ. Από την $c(k)\sharp\sharp \sim_D d(k)$ παίρνουμε $c(k)\sharp\sharp\flat \sim_D d(k)\flat$ από όπου $c(k)\sharp \sim_D d(k)\flat$, κλπ. $\square$

Ο σκοπός μας στη συνέχεια είναι να παραθέσουμε μία διαδικασία με την βοήθεια της οποίας θα εντοπίζουμε μέσα σε κάθε διατονική κλάση, τις μουσικές λέξεις με το *ελάχιστο μήκος*.

Για τον σκοπό αυτό είναι απαραίτητο να ελαχιστοποιήσουμε διατονικά το μήκος των μονωνύμων $x(k)w$, $w \in \{\sharp, b\}^*$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

1. Αν η λέξη w περιέχει τόσες διέσεις όσες και υφέσεις, δηλαδή $|w|_\sharp = |w|_\flat$, τότε $w \sim_D \varepsilon$ και άρα $x(k)w \sim_D x(k)$.

2. Αν $|w|_\sharp > |w|_\flat$, τότε
$$x(k)w \sim_D x(k)\sharp^{|w|_\sharp - |w|_\flat}.$$

Διαιρώντας τον αριθμό $|w|_\sharp - |w|_\flat$ με το 12 βρίσκουμε ένα πηλίκο q κι ένα υπόλοιπο r,
$$|w|_\sharp - |w|_\flat = 12q + r, \quad 0 \leq r < 12.$$

Έτσι, λοιπόν

$$\begin{aligned} x(k)\sharp^{|w|_\sharp - |w|_\flat} &\sim_D x(k)\sharp^{12q+r} \\ &\sim_D x(k)\sharp^{12q}\sharp^r \\ &\sim_D x(k)\underbrace{\sharp^{12}\cdots\sharp^{12}}_{q \text{ φορές}}\sharp^r \\ &\sim_D x(k+1)\underbrace{\sharp^{12}\cdots\sharp^{12}}_{q-1 \text{ φορές}}\sharp^r \\ &\quad\vdots \\ &\sim_D x(k+q)\sharp^r \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$x(k)w \sim_D x(k+q)\sharp^r.$$

Ορίζουμε, ως *ύψος* του $x(\mu)$ την απόσταση του (στον άξονα των φθόγγων) από το $c(\mu)$, δηλαδή τον αριθμό των βημάτων από το $x(\mu)$ στο χαμηλότερό του $c(\mu)$ (συμπεριλαμβανομένου). Συμβολίζεται με $\| x \|$.

$$\begin{array}{ccc}
 & \vdots & \\
 & | & \\
\longrightarrow & x(\mu) & \\
 & | & \\
 & \vdots & \\
 & | & \\
 & c(\mu)\sharp & x(\mu) = c(\mu)\sharp^{\|x(\mu)\|-1} \\
 & | & \\
 & c(\mu) & \\
 & | & \\
 & \vdots &
\end{array}$$

Σχήμα 2. Ύψος φθόγγου

Συνεχίζοντας τη διαδικασία αναγωγής διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

2.1. $\| x(k+q) \| + r < 12$, οπότε

$$x(k+q)\sharp^r \sim_D y(k+q) \ \text{ ή } \ y(k+q)\sharp$$

αντίστοιχα, για κάποιο $y \in \{c, d, e, f, g, a, b\}$.

2.2. $\| x(k+q) \| + r \geq 12$, οπότε

$$x(k+q)\sharp^r \sim_D y(k+q+1) \ \text{ ή } \ y(k+q+1)\sharp$$

αντίστοιχα, για κάποιο $y \in \{c, d, e, f, g, a, b\}$.

3. Αν $|w|_\flat > |w|_\sharp$, τότε

$$x(k)w \sim_D x(k)\flat^{|w|_\flat - |w|_\sharp}$$

Διαιρώντας και πάλι το $|w|_\flat - |w|_\sharp$ με το 12 βρίσκουμε

$$|w|_\flat - |w|_\sharp = 12q + r, \ \ 0 \leq r < 12$$

και συνεπώς

$$\begin{aligned} x(k)\flat^{|w|_\flat - |w|_\sharp} &\sim_D x(k)\flat^{12q+r} \\ &\sim_D x(k)\flat^{12q}\flat^{r} \\ &\sim_D x(k)\underbrace{\flat^{12}\cdots\flat^{12}}_{q \text{ φορές}}\flat^{r} \\ &\sim_D x(k-1)\underbrace{\flat^{12}\cdots\flat^{12}}_{q-1 \text{ φορές}}\flat^{r} \\ &\;\;\vdots \\ &\sim_D x(k-q)\flat^{r} \end{aligned}$$

Ως *βάθος* του $x(\mu)$ ορίζουμε την απόσταση του στον άξονα των φθόγγων από το $c(\mu+1)$ και το συμβολίζουμε με $< x >$

$$\begin{array}{ccc} & \vdots & \\ & | & \\ & c(\mu+1) & \\ & | & \\ & b(\mu) & \\ & | & \\ & \vdots & x(\mu) = c(\mu+1)\flat^{<x(\mu)>-1} \\ & | & \\ \longrightarrow & x(\mu) & \\ & | & \\ & \vdots & \end{array}$$

Σχήμα 3. Βάθος φθόγγου

Προφανώς ισχύει $\| \; x(\mu) \; \| \; + < x(\mu) >= 14$

3.1. Αν $< x(k-q) > + \, r < 12$, τότε

$$x(k-q)\flat^{r} \sim_D y(k-q) \;\; \text{ή} \;\; y(k-q)\flat$$

αντίστοιχα, για κάποιο $y \in \{c, d, e, f, g, a, b\}$.

3.2. Αν $< x(k-q) > + \, r \geq 12$, τότε

$$x(k-q)\flat^{r} \sim_D y(k-q-1) \;\; \text{ή} \;\; y(k-q-1)\flat$$

αντίστοιχα, για κάποιο $y \in \{c, d, e, f, g, a, b\}$.

Τώρα, για να ανάγουμε διατονικά μία μουσική λέξη

$$s = x_1(k_1)w_1 \cdots x_p(k_p)w_p,$$

δεν έχουμε παρά να ανάγουμε κάθε ένα από τα μονώνυμα $x_1(k_1)w_1, \ldots, x_p(k_p)w_p$ και να παραθέσουμε τις προκύπτουσες λέξεις.

Μία μουσική λέξη s λέγεται *διατονικά ανάγωγη* αν δεν υπάρχει μουσική λέξη s' με μικρότερο μήκος έτσι ώστε $s \sim_D s'$. Οι ανάγωγες μουσικές λέξεις είναι λοιπόν όλες οι λέξεις από το αλφάβητο

$$X_{RED} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{c(k), c(k)\sharp, d(k)\flat, d(k), d(k)\sharp, e(k)\flat, e(k), f(k), f(k)\sharp, g(k)\flat, g(k), g(k)\sharp, a(k)\flat, a(k), a(k)\sharp, b(k)\flat, b(k)\}$$

4 Το Εναρμόνιο Μονοειδές

Δύο μουσικές λέξεις s, t ονομάζονται εναρμόνιες $s \sim_H t$ αν η μία προκύπτει από την άλλη με χρήση των σχέσεων (Σ_2).

Πρόταση 4. *Δύο ανάγωγες μουσικές λέξεις είναι εναρμόνιες αν και μόνον αν είναι διατονικά ισοδύναμες. Κατά συνέπεια η εναρμόνια κλάση $[s]_H$ της ανάγωγης μουσικής λέξης s είναι η τομή της διατονικής κλάσης της s με το σύνολο X^*_{RED}*

$$[s]_H = [s]_D \cap X^*_{RED}, \;\; [s]_H = \{t / t \in X^*_{RED}, \; t \sim_H s\}, \;\; \forall s \in X^*_{RED}.$$

Το πηλίκο του X^*_{RED} με την $\sim_H$ είναι λοιπόν ένα μονοειδές, που το ονομάζουμε *εναρμόνιο μονοειδές* και το συμβολίζουμε M_H, δηλαδή

$$M_H = X^*_{RED} / \sim_H .$$

Στην πραγματικότητα τα μονοειδή M_D και M_H είναι το ένα αντίγραφο του άλλου.

Μια δομή θεωρείται αντίγραφο μιας άλλης αν οι δύο αυτές δομές είναι μεταξύ τους ισόμορφες. Συγκεκριμένα, ένας μορφισμός από το μονοειδές M στο μονοειδές M' είναι μία συνάρτηση $h : M \to M'$ που διατηρεί τις πράξεις και τα ουδέτερα στοιχεία

$$h(m_1 \oplus m_2) = h(m_1) \oplus' h(m_2), \; h(e) = e'.$$

Αν η συνάρτηση h είναι επί (surjective), αντίστοιχα 1-1 και επί (bijective), τότε ο h ονομάζεται επιμορφισμός, αντίστοιχα ισομορφισμός. Τα μονοειδή M και M' λέγονται ισόμορφα μεταξύ τους, συμβολισμός $M \cong M'$. Δύο ισόμορφες δομές ταυτίζονται ανεξάρτητα από την φύση των στοιχείων τους.

Υπάρχει ένα σημαντικό θεώρημα στην Άλγεβρα που θα χρησιμοποιήσουμε στην επόμενη παράγραφο.

Θεώρημα 1 (Θεμελιώδες Θεώρημα Μορφισμού). *Κάθε επιμορφισμός μονοειδών $h : m \to m'$ επάγει έναν ισομορφισμό μονοειδών*

$$M / \sim_h \cong M'$$

όπου $\sim_h$ συμβολίζει την ισοδυναμία

$$m_1 \sim_h m_2 \;\; \text{αν} \;\; h(m_1) = h(m_2)$$

Τώρα, υπάρχει ένας ισομορφισμός $\Theta : M_D \to M_H$, ο οποίος υλοποιείται από την αντιστοιχία

$$[s]_D \overset{\Theta}{\mapsto} [s]_H$$

Πρόταση 5. *Τα μονοειδή M_D και M_H είναι μεταξύ τους ισόμορφα.*

Η εναρμόνια κλάση $[s]_H$, $s \in X^*_{RED}$ έχει πεπερασμένου πλήθους στοιχεία τα οποία καλούμαστε να προσδιορίσουμε. Θέτουμε

$$A = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{d(k)\flat, d(k)\sharp, g(k)\flat, g(k)\sharp, a(k)\flat, a(k)\sharp\}$$

και για κάθε ανάγωγη μουσική λέξη $s \in X^*_{RED}$ συμβολίζουμε $|s|_A$ το πλήθος των γραμμάτων του A που εμφανίζονται στην s. Τώρα, σε κάθε θέση της s που εμφανίζεται ένα γράμμα του A έχουμε τη δυνατότητα δύο επιλογών. Έτσι, η εναρμόνια κλάση της s έχει $2^{|s|_A}$ στοιχεία.

Πρόταση 6. *Για κάθε ανάγωγη μουσική λέξη $s \in X^*_{RED}$*

$$card[s]_H = 2^{|s|_A}.$$

Για να είναι λοιπόν δύο ανάγωγες μουσικές λέξεις s, t εναρμόνιες:

1. Πρέπει οι s και t να έχουν το ίδιο μήκος

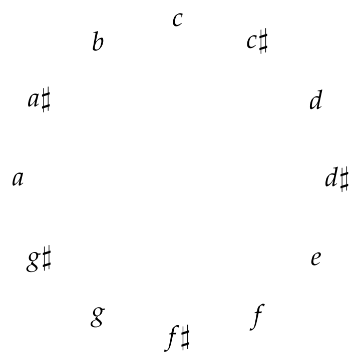
$$|s| = |t|.$$

2. Αν η s έχει ένα γράμμα του αλφαβήτου $\{c(k)\sharp, e(k)\flat, f(k)\sharp, b(k)\flat\}$, όπου $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, τότε πρέπει και η t να έχει το ίδιο γράμμα στην ίδια θέση.

3. Αν η s έχει ένα γράμμα του αλφαβήτου A σε μία θέση, τότε η t πρέπει να έχει το ίδιο γράμμα ή το συμμετρικό του στην ίδια θέση (το συμμετρικό του $c(k)\sharp$ είναι το $d(k)\flat$ και αντιστρόφως, το συμμετρικό του $d(k)\sharp$ είναι το $e(k)\flat$ και αντιστρόφως, το συμμετρικό του $f(k)\sharp$ είναι το $g(k)\flat$ και αντιστρόφως, κλπ).

5 Κυκλική Διατονικότητα Μορφισμός Babbitt

Ας τοποθετήσουμε τώρα τους φθόγγους της βασικής οκτάβας του πιάνου σε κυκλική διάταξη



Σχήμα 4. Μουσικό Ωρολόγιο

Οι μελωδίες στην περίπτωση αυτή δημιουργούνται από φθόγγους του κύκλου, που είναι οι μελωδίες οι αντιληπτές στον "modulo 12 κόσμο", όπου η μέτρηση γίνεται από $0, 1, \ldots, 11$.

Τα όντα του κόσμου αυτού δεν μπορούν να ξεχωρίσουν δύο αριθμούς που διαφέρουν κατά πολλαπλάσιο του 12 και συνεπώς δεν μπορούν να ξεχωρίσουν δύο ήχους που διαφέρουν κατά έναν αριθμό οκτάβων.

Η πρόσθεση στον mod12 κόσμο, που ονομάζεται *mod12 πρόσθεση* γίνεται με τον νόμο του ωρολογιού

$$\begin{aligned} \kappa \oplus \lambda = & \quad \kappa + \lambda, & \text{αν } \kappa + \lambda < 12 \\ = & \quad \kappa + \lambda - 12, & \text{αν } \kappa + \lambda \geq 12 \end{aligned}$$

Π.χ.

$$\begin{aligned} 7 \oplus 8 &= 15 - 12 = 3, \\ 6 \oplus 6 &= 12 - 12 = 0, \\ 5 \oplus 3 &= 8. \end{aligned}$$

Ο πλήρης πίνακας της παραπάνω πράξης είναι

$\oplus$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8
10	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

ο οποίος διαβάζεται ως εξής: το mod12 άθροισμα $\kappa \oplus \lambda$ βρίσκεται στη συμβολή της γραμμής του κ και της στήλης του λ. Ας σημειωθεί ότι στον παραπάνω πίνακα κάθε μία γραμμή προκύπτει από την προηγούμενη της με κυκλική εναλλαγή.

Στο εξής, με $\mathbb{Z}_{12}$ θα συμβολίζουμε το σύνολο των αριθμών $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$, δηλαδή $\mathbb{Z}_{12} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$.

Θεωρούμε το αλφάβητο $X_{note} = \{c, d, e, f, g, a, b\}$ και το σύνολο $M_{mus} \subseteq (X_{note} \cup \{\sharp, \flat\}^*)^*$ που αποτελείται από όλες τις λέξεις της μορφής

$$x_1 w_1 \cdots x_k w_k \quad x_i \in X_{note}, \quad w_i \in \{\sharp, \flat\}^*, \quad i = 1, \dots, k$$

μαζί με την κενή λέξη. Το M_{mus} είναι μονοειδές με πράξη την παράθεση.

Λέμε ότι οι μουσικές λέξεις $s, t \in M_{mus}$ είναι διατονικά ισοδύναμες $s \sim_d t$, αν η μία προκύπτει από την άλλη εφαρμόζοντας μία ή περισσότερες φορές τις ακόλουθες ισότητες:

$$\sigma_0 = \left\{ \begin{array}{lll} & \sharp\flat = \varepsilon, & \flat\sharp = \varepsilon, \\ c\sharp\sharp = d, & d\sharp\sharp = e, & e\sharp = f, \\ f\sharp\sharp = g, & g\sharp\sharp = a, & a\sharp\sharp = b, \\ & b\sharp = c & \end{array} \right.$$

Η $\sim_d$ είναι μία σχέση ισοδυναμίας στο M_{mus} συμβατή με την πράξη της παράθεσης και άρα το πηλίκο $M_d = M_{mus} / \sim_d$ είναι ένα μονοειδές.

Τα στοιχεία του M_d είναι οι κλάσεις της ισοδυναμίας $\sim_d$.

Πρόταση 7. *Ισχύουν*

$$\sigma_1 = \left\{ \begin{array}{lll} c\flat \sim_d b, & b\flat\flat \sim_d a, & a\flat\flat \sim_d g \\ g\flat\flat \sim_d f, & f\flat \sim_d e, & e\flat\flat \sim_d d \\ & d\flat\flat \sim_d c & \end{array} \right.$$

και ακόμη

$$\sigma_2 = \left\{ \begin{array}{lll} c\sharp \sim_d d\flat, & d\sharp \sim_d e\flat, & f\sharp \sim_d g\flat \\ g\sharp \sim_d a\flat, & a\sharp \sim_d b\flat & \end{array} \right.$$

Σκοπός μας είναι να προσδιορίσουμε όλες τις μουσικές λέξεις $t \in M_{mus}$ οι οποίες είναι ισοδύναμες με μία εκ των προτέρων δοσμένη μουσική λέξη $s \in M_{mus}$ και οι οποίες έχουν το ελάχιστο μήκος. Παρατηρούμε ότι η χρήση των σχέσεων (σ_1) γνήσια μειώνει το μήκος. Οι μόνες σχέσεις που διατηρούν το μήκος είναι οι σχέσεις (σ_2).

Μία μουσική λέξη s λέγεται *ανάγωγη* αν δεν υπάρχει λέξη s' με μικρότερο μήκος έτσι ώστε $s \sim_d s'$.

Οι ανάγωγες μουσικές λέξεις είναι λοιπόν *όλες* οι λέξεις από το αλφάβητο

$$X_{red} = \{c, c\sharp, d\flat, d, d\sharp, e\flat, e, f, f\sharp, g\flat, g, g\sharp, a\flat, a, a\sharp, b\flat, b\}.$$

Δύο ανάγωγες μουσικές λέξεις s, t ονομάζονται *εναρμόνιες* $s \sim_h t$, αν η μία προκύπτει από την άλλη με χρήση των σχέσεων (σ_2).

Πρόταση 8. *Αν s είναι μία ανάγωγη μουσική λέξη, $s \in X^*_{red}$, τότε το πλήθος των εναρμονίων με την s μουσικών λέξεων είναι $2^{|s|_A}$, όπου*

$$A = \{d\flat, d\sharp, g\flat, g\sharp, a\flat, a\sharp\}.$$

Και πάλι η $\sim_h$ είναι συμβατή με την παράθεση στο X^*_{red}, το δε μονοειδές πηλίκο $X^*_{red}/\sim_h$ συμβολίζεται με M_h, δηλαδή

$$M_h = X^*_{red}/\sim_h$$

Χρησιμοποιώντας τα επιχειρήματα της παραγράφου 2 αποδεικνύουμε ότι τα μονοειδή M_d και M_h είναι μεταξύ τους ισόμορφα.

Η συνάρτηση *Babbitt* είναι το μέσον επικοινωνίας του "πραγματικού" διακριτού κόσμου, με τον modulo 12 μουσικό κόσμο, Babbitt [1, 2]. Πρόκειται για διαδικασία περιέλιξης του άξονα των φθόγγων γύρω από τον κύκλο των φθόγγων. Η συνάρτηση *Babbitt* $B : M_{MUS} \to M_{mus}$ μετασχηματίζει την μουσική λέξη $x_1(k_1)w_1 \cdots x_p(k_p)w_p$ στη μουσική λέξη $x_1 w_1 \cdots x_p w_p$, δηλαδή σβήνει τους δείκτες οκτάβας:

$$B(x_1(k_1)w_1 \cdots x_p(k_p)w_p) = x_1 w_1 \cdots x_p w_p$$

όπου $x_1, \ldots, x_p \in X_{note}$, $k_1, \ldots, k_p \in \mathbb{Z}$ και $w_1, \ldots, w_p \in \{\sharp, b\}^*$. Π.χ. έχουμε

$$B(f(2)\sharp c(0)c(-1)\flat b(0)) = f\sharp cc\flat b \ \text{κλπ.}$$

Η συνάρτηση B διατηρεί την παράθεση μουσικών λέξεων, αφού για κάθε

$$s = x_1(k_1)w_1 \cdots x_p(k_p)w_p, \quad t = y_1(\lambda_1)u_1 \cdots y_q(\lambda_q)u_q$$

έχουμε

$$\begin{aligned}
B(st) &= B(x_1(k_1)w_1 \cdots x_p(k_p)w_p y_1(\lambda_1)u_1 \cdots y_q(\lambda_q)u_q) \\
&= x_1 w_1 \cdots x_p w_p y_1 u_1 \cdots y_q u_q \\
&= B(x_1(k_1)w_1 \cdots x_p(k_p)w_p) B(y_1(\lambda_1)u_1 \cdots y_q(\lambda_q)u_q) \\
&= B(s)B(t)
\end{aligned}$$

και άρα B είναι μορφισμός μονοειδών. Επιπλέον η B είναι μία συνάρτηση *επί*, άρα είναι ένας επιμορφισμός, όπως επίσης επιμορφισμός είναι και η συνάρτηση

$$[s]_D \mapsto [B(s)]_d$$

από το M_D στο M_d. Εφαρμόζοντας λοιπόν το θεμελιώδες θεώρημα μορφισμού προκύπτει ότι το μονοειδές M_d είναι αντίγραφο του μονοειδούς $M_D/\sim_B$, όπου $\sim_B$ είναι η ισοδυναμία που ορίζεται από

$$[s]_D \sim_B [t]_D \text{ αν και μόνο αν } [B(s)]_d = [B(t)]_d.$$

Θεώρημα 2. *Ο μορφισμός Babbitt επάγει τον ισομορφισμό*

$$M_d \xrightarrow{\sim} M_D/\sim_B .$$

Εργαζόμενοι με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε ότι

Θεώρημα 3. *Τα μονοειδή M_h και $M_H/\sim_B$ είναι μεταξύ τους ισόμορφα*

$$M_h \xrightarrow{\sim} M_H/\sim_B .$$

6 Συμπέρασμα

Η επεξεργασία και παρουσίαση του αντικειμένου στην εργασία αυτή, οδηγεί στην θεώρηση γενικών συστημάτων φθόγγων στην κατηγορία των συνόλων. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το σύστημα $(c(o), \sharp)$ μπορεί να ταυτιστεί με το σύστημα Αξιωματικής Θεμελίωσης των φυσικών αριθμών κατά Peano. Το σύστημα $(c(o), \sharp, b)$ μπορεί λοιπόν να θεωρηθεί ως επέκταση της αξιωματικής Peano και συνεπώς να οριστεί σε οποιαδήποτε κατάλληλη κατηγορία, Mac Lane-Birkoff [11]. Η ιδέα αυτή θα αναπτυχθεί σε βάθος σε μελλοντική εργασία.

Αναφορές

[1] Babbitt M. (1960). Twelve-Tone Invariants as Compositional Determinants. The Musical Quarterly, Vol. 46, No 2, pp. 246-259.

[2] Babbitt M. (1961). Set Structure as a compisitional Determinant. Journal of Music Theory, Vol. 5, No 1, pp. 72-94.

[3] Berstel, J., Reutenauer, C. (1998). Rational Series and their languages. EATCS Monographs on Theoretical Computer Science, Springer.

[4] Berstel, J., Reutenauer, C (2010). Noncommutative Rational Series with Applications, Cambridge University Press.

[5] Bozapalidou M. (2013). Automata and music contour functions. *Journal of Mathematics and Music*, vol.7, Number 3, 195-211.

[6] Bozapalidou M. (2017). Sequential Machines and Affine Musical Contours. *Algebraic Modeling of Topological and Computational Structures and Applications*, Springer, 439-445.

[7] Bozapalidou M. (2018). Fuzzy Musical Languages. Fuzzy Sets and Systems (online).

[8] Chemillier M. (1987) Monoide libre et musiqu. RAIRO Inf. Theo. vol. 21, no 3 et 4, pp. 341-371 et 379-417.

[9] Chemillier M. (1990). Structure et méthode algébriques en informatique musicale, thése, Université Paris 7.

[10] Chemillier M., Timis D. (1988). Toward a theory of formal musical languages. Proc. of the ICMC, Cologne, pp. 175-183.

[11] MacLane S., Birkoff G. (1974). G. Algébre, vol.1, Gautier Villar.

[12] Πουλάκης Δ. (2014). *Άλγεβρα*, Εκδόσεις Ζήτη.